1/10/14

→ Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών $\bar{f}: U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$

Υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις:

$\boxed{m=1}$ $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ πραγματική συνάρτηση

(αν $m \geq 2$, τότε έχουμε μια διανυσματική συνάρτηση:

$$\bar{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} \quad U \to \mathbb{R}^m \quad \text{δηλαδή} \quad \underset{\in \mathbb{R}^n}{\bar{f}(\bar{x})} = \begin{pmatrix} f_1(\bar{x}) \\ f_2(\bar{x}) \\ \vdots \\ f_m(\bar{x}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

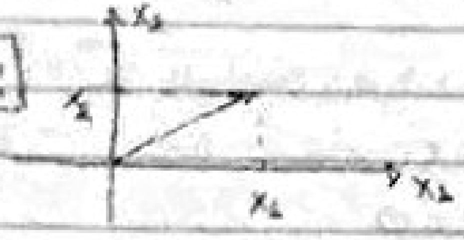
όπου $f_i: U \to \mathbb{R}$ πραγματικές συναρτήσεις,

δηλαδή, $f_i(\bar{x}) \in \underline{\underline{\mathbb{R}}}$, $i = 1, 2, \dots, m$)

→ $f_i: U \to \mathbb{R}$ συνιστώσες συναρτήσεις της διανυσματικής συνάρτησης

$\bar{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ διάνυσμα ή σημείο στον $\mathbb{R}^n$ με συντεταγμένες x_i, όπου $i = 1, 2, \dots, n$

Πχ. $\boxed{n=2}$



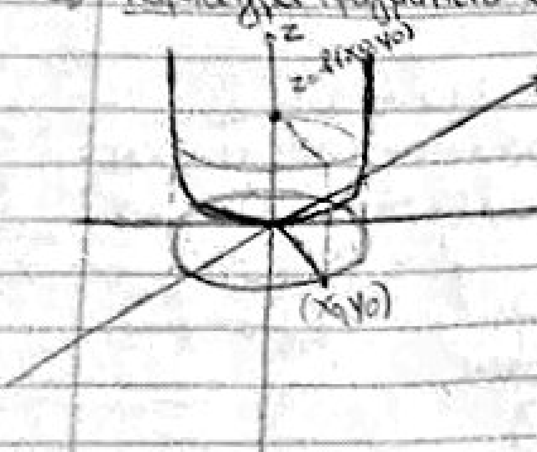
$\boxed{n=1}$ $\bar{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$ $U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R} (= \mathbb{R}^1)$

Αν το U είναι διάστημα στο $\mathbb{R}$ και η $\bar{f}$ συνεχής ($\Leftrightarrow f_i$, $i = 1, 2, \dots$ συνεχή)

(*) Τότε η $\bar{f}$ λέγεται <u>παραμετρική καμπύλη</u> στον $\mathbb{R}^n$!

$\boxed{n=m}$ $\bar{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$: $U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$: <u>διανυσματικό πεδίο</u>

→ Παράδειγμα πραγματικής συνάρτησης (για n=2 $f(x,y)=x^2+y^2$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$)
$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$



⊛ Παρατήρηση: για διανύσματα ή σημεία στον $\mathbb{R}^3$ αντί για $\bar{x}=(x_1,x_2,x_3)$ χρησιμοποιούμε συχνά το (x,y,z)

Στο τελευταίο μάθημα $Lf(c)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ \underbrace{f(x,y)}_{=x^2+y^2}=c\}$, $c\in\mathbb{R}$

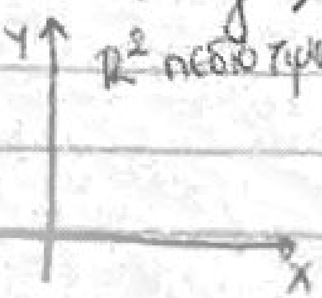
• Ορισμός: Αν $f: U\to\mathbb{R}$, $U\subset\mathbb{R}^n$ το σύνολο $Lf(c)=\{\bar{x}\in U \ f(\bar{x})=c\}$
ονομάζεται σύνολο στάθμης c της f.

πχ. αν $c>0$ $Lf(c)\equiv$ κύκλος ακτίνας $\sqrt{c}$
αν $c=0$ $Lf(c)$: το σύνολο $(0,0)$, $Lf(c)=\{(0,0)\}$
αν $c<0$ $Lf(c)=\varnothing$

→ Το γράφημα μιας πραγματικής συνάρτησης $f:U\to\mathbb{R}$, $U\subset\mathbb{R}^2$ είναι μια επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ (υπό πρόσθετες συνθήκες: συνέχεια, διαφορισιμότ κ
↑ενός είδους (θα συζητηθεί εκτενέστερα στον Αν4)

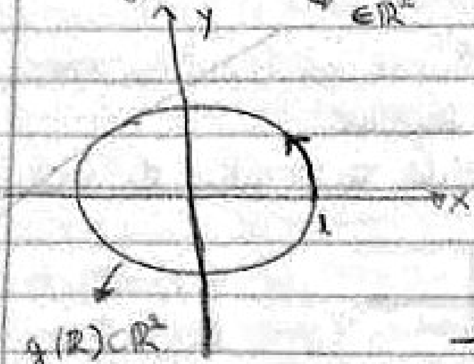
Παράδειγμα παραμετρικής καμπύλης:
$\bar{g}: \mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ $g(t)=(\cos t, \sin t)$ $t\in\mathbb{R}$
προσοχή! Η $\bar{g}$ έχει εικόνα μία καμπύλη
Συνήθως στις παραμετρικές καμπύλες αναπαριστούμε γραφικά την εικόνα $\bar{g}(U)$, $U\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^2$ πεδίο τιμών



Processed by FREE version of STOIK
Mobile Doc Scanner from www.stoik.com

$$\bar{g}(t) = (\underbrace{\overset{x(t)}{\cos t}, \overset{y(t)}{\sin t}}_{\in \mathbb{R}^2}),\ t \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2(t) + y^2(t) = 1$$



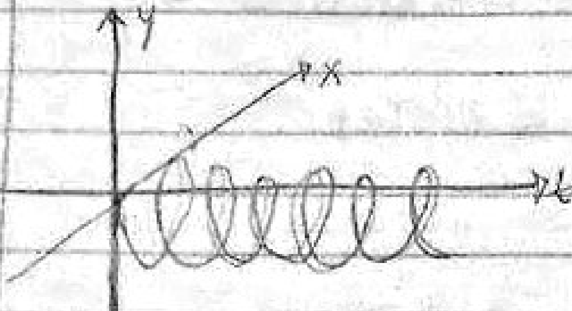
→ Πού είναι το πεδίο ορισμού σε αυτή τη γραφική αναπαράσταση;

Δεν φαίνεται. Ιδέα: $t \in \mathbb{R}$ είναι η χρονική μεταβλητή ενός σημειακού σωματιδίου που κινείται στον χώρο.

→ Πώς μπορώ να δείξω τον χρόνο στην καμπύλη;

Συνήθως, με ένα βέλος στην φορά της κίνησης.

$\bar{g}(0) = (1,0)$, $\bar{g}(\pi/2) = (0,1)$



$\Gamma_{\bar{g}} = \{(t, \cos t, \sin t)\ t \in \mathbb{R}\}$

το γράφημα της $\bar{g}$

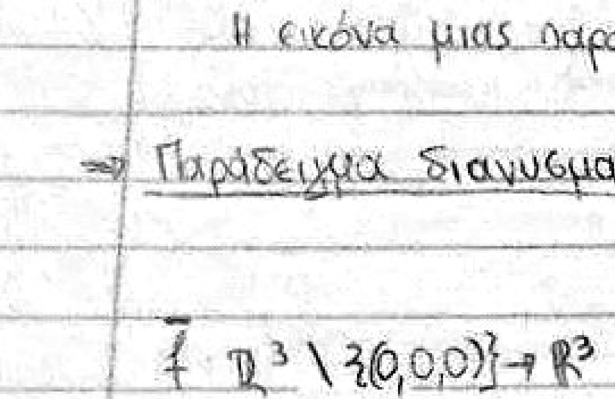
Η εικόνα μιας παραμετρικής καμπύλης ονομάζεται και <u>δρόμος</u>.

⇒ <u>Παραδείγματα διανυσματικού πεδίου</u>: βαρυτικό πεδίο του ήλιου πάνω στη γη (ή σε έναν πλανήτη)

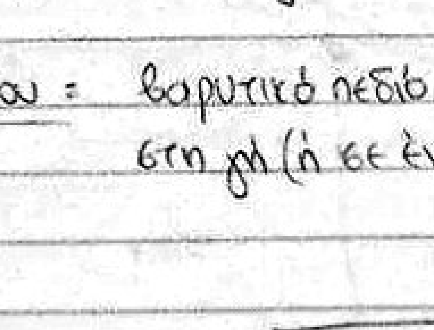
$\bar{f}: \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}^3$

$\bar{f}(x,y,z) = -\frac{mMG}{r^3}(x,y,z)$, όπου $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \|(x,y,z)\|$

και $\underset{\in \mathbb{R}}{m}$ η μάζα της γης, $M \in \mathbb{R}$ η μάζα του ήλιου και $G \in \mathbb{R}$ η



<u>Στον $\mathbb{R}^2$</u>: η $\vec{h}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $\bar{h}(x,y) = (x,y)$



* Συμπέρασμα: Σίγουρα για να περιγράψουμε συναρτήσεις $\vec{f}: U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$

πρέπει να "καταλάβουμε" τον $\mathbb{R}^n$ και τον οποίο θα βλέπουμε και ως διανυσματικό χώρο και ως σύνολο σημείων.

Σε κάθε περίπτωση για να μπορούμε να μετράμε αποστάσεις χρειαζόμαστε μια μετρική.

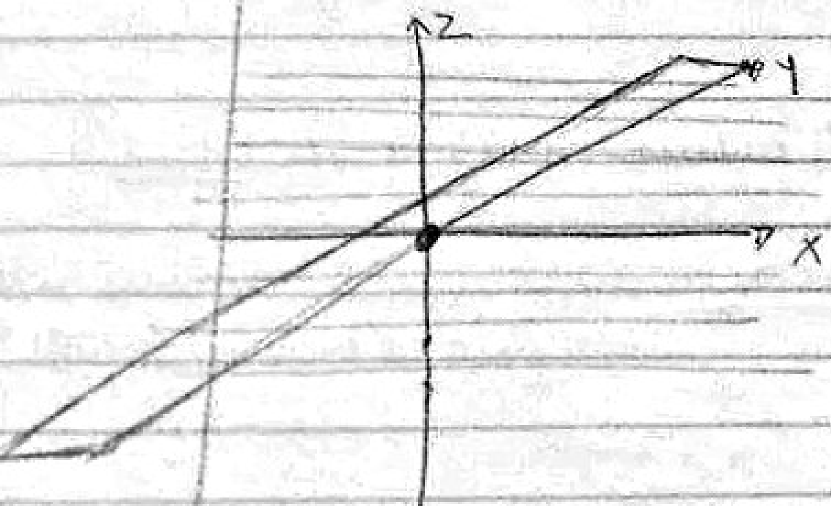
Η Ανάλυση που βρίσκεται;

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$

Η f είναι ασυνεχής στο $x=0$ αφού η ακολουθία $-\frac{1}{\nu} \xrightarrow{\nu \to \infty} 0$

και $f\left(-\frac{1}{\nu}\right) = 0 \xrightarrow[\nu \to \infty]{} 0 \neq f(0) = 1$



$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$g(x,y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$